線形代数のポイント

平成22年6月11日

ポイント 1

任意の縦ベクトル $|u\rangle$ は**基底** $a = \{|a_1\rangle, \cdots, |a_n\rangle\}$ によって

$$|u\rangle = u_1|a_1\rangle + \cdots + u_n|a_n\rangle \tag{1}$$

と展開される．このとき

$$|u\rangle \stackrel{a}{=} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

と表し，右辺を $|u\rangle$ の基底 a による**列ベクトル表示**という．

ポイント 2

縦ベクトル $|u\rangle$ の**エルミート共役**を

$$\langle u| = u_1^*\langle a_1| + \cdots + u_n^*\langle a_n| \tag{3}$$

によって定義する．$\langle u|$ は横ベクトルである．上式において，$\langle a_i|$ は $\langle a_i|a_j\rangle$ が $|a_i\rangle$ と $|a_j\rangle$ の**内積**で与えられるような横ベクトルである．

ポイント 3

$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$ であるような基底を**正規直交基底**という．このとき $\langle u|$ は

$$\langle u| \stackrel{a}{=} \begin{bmatrix} u_1^* & \cdots & u_n^* \end{bmatrix} \tag{4}$$

と**行ベクトル表示**される．また，$|u\rangle$ と $|v\rangle$ の内積は

$$\langle u|v\rangle \stackrel{a}{=} \begin{bmatrix} u_1^* & \cdots & u_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1^*v_1 + \cdots + u_n^*v_n \tag{5}$$

と表せる．これを**標準内積**という．

ポイント 4

線形変換とはベクトル $|u\rangle$ を別のベクトル $X|u\rangle$ へと変換する操作 X で

$$X(\lambda|u\rangle + \mu|v\rangle) = \lambda X|u\rangle + \mu X|v\rangle \tag{6}$$

を満たすものをいう．

ポイント 5

$X_{ij} = \langle a_i|X|a_j\rangle$ を並べて

$$X \overset{a}{=} \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

と表し, 右辺を X の基底 a による**行列表示**という.

ポイント 6

行列表示が

$$\begin{bmatrix} X_{11}^* & \cdots & X_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ X_{1n}^* & \cdots & X_{nn}^* \end{bmatrix} \tag{8}$$

となるような線形変換を $X^\dagger$ と表し, X の**エルミート共役**という.

ポイント 7

$X^\dagger = X$ を満たす線形変換を**エルミート変換**という. また, $X^\dagger = X^{-1}$ を満たす線形変換を**ユニタリ変換**という.

ポイント 8

$|a_i\rangle\langle a_i|$ を a_i 軸への**正射影**という. このとき, $|a_i\rangle\langle a_i|u\rangle = u_i|a_i\rangle$ である.

ポイント 9

完全性関係とよばれる等式

$$I = \sum_{i=1}^{n} |a_i\rangle\langle a_i| \tag{9}$$

が成り立つ. ここで, I は恒等変換である.

ポイント 10

$X|b_i\rangle = \xi_i|b_i\rangle$ が成り立つとき, ξ_i を X の**固有値**といい, また, $|b_i\rangle$ を固有値 ξ_i に属する**固有ベクトル**という.

ポイント 11

X の固有ベクトルから基底 $b = \{\!\{|b_1\rangle, \cdots, |b_n\rangle\}\!\}$ を作れるとき X は**対角化可能**であるという．つまり, X の基底 b による行列表示は対角行列

$$X \stackrel{b}{=} \begin{bmatrix} \xi_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \xi_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

となる．

ポイント 12

X と Y の**交換子**を $[X, Y] = XY - YX$ によって定義する． このとき, $[X, Y] = 0$ ならば, X と Y は**同時対角化可能**である．つまり, X と Y の共通の固有ベクトルから基底を作ることができる．

ポイント 13

$[X, X^\dagger] = 0$ を満たす線形変換を**正規変換**という． 正規変換の場合, その固有ベクトルから正規直交基底を作ることができる．エルミート変換, ユニタリ変換は正規変換である．

ポイント 14

正規変換 X は

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |b_i\rangle\langle b_i| \tag{11}$$

と表せる．これを X の**スペクトル分解**という．このとき

$$X^\dagger = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* |b_i\rangle\langle b_i| \tag{12}$$

である．また, X が逆変換を持つならば

$$X^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} |b_i\rangle\langle b_i| \tag{13}$$

が成り立つ．