固体物理学Ⅰ　演習問題 2012.5.21　　　　　主専攻　学籍番号　　　　　　　氏名

１．$F(x,y)=\frac{1}{R}+\frac{1}{R+x-y}-\frac{1}{R+x}-\frac{1}{R-y}$ を $|x|,|y|<<R$ にて多項式近似するとき、係数が零とならない最低次を答えよ。

$|x|<1$ において $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$ であるから、例えば $\frac{1}{R+x}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{1+(x/R)}\right)=\frac{1}{R}\left(1-\frac{x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2-\dots\right)$。

よって、

$$F=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\left(1-\frac{x-y}{R}+\left(\frac{x-y}{R}\right)^2-\dots\right)-\frac{1}{R}\left(1-\frac{x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2-\dots\right)-\frac{1}{R}\left(1-\left(-\frac{y}{R}\right)+\left(-\frac{y}{R}\right)^2-\dots\right)$$

$$\approx\frac{1}{R}\left(\left(\frac{x-y}{R}\right)^2-\left(\frac{x}{R}\right)^2-\left(\frac{y}{R}\right)^2\right)=-\frac{2}{R^3}xy$$

（一次までの展開で打ち消し合って係数が零となり、二次まで展開して初めて零とならない項が出てくる）

２．A,B,R,σ,ε を正の数として $U(R)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{R}\right)^6\right]$ とするとき、$U(R)$ の概形を極値などに注意して描け。

$U(R)=4\varepsilon\left(\frac{\sigma}{R}\right)^6\left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^6-1\right]$ と変形すると、$U(\sigma)=0$、$\lim_{R\to 0}U(R)=+\infty$、$R>\sigma$ で $U(R)<0$、$\lim_{R\to\infty}U(R)=0$ となることが分かる。また、$\frac{dU}{dR}=4\varepsilon\left[-12\frac{\sigma^{12}}{R^{13}}+6\frac{\sigma^6}{R^7}\right]=24\varepsilon\frac{\sigma^6}{R^7}\left[-2\frac{\sigma^6}{R^6}+1\right]=0$ より、$R=2^{1/6}\sigma\approx1.12\sigma$ で最小 ε となる。これらを踏まえてグラフにすると、