量子力学Ⅰ中間試験　平成 25 年 6 月 5 日　　　　　　　　　　　　　　主専攻　学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

プランク定数を2πで割った数を$\hbar$で表わす。また、粒子の質量はいずれの場合もmとする。

問題Ⅰ　1 次元空間に完全に閉じ込められた自由粒子の運動について考える。(簡単のために閉じ込められた空間内でのポテンシャルは零として良い)

(1)　時間を含まないシュレディンガー方程式の具体的な形を答えよ。また、物理的に適した解(固有関数)はどのような条件を満たすべきかを答えよ。

(2)　運動エネルギーが負または零となる状態は物理的に許されない。運動エネルギーが負の場合に、このことを示せ。

(3)　運動エネルギーが正の場合に対して固有関数を求めよ(そのような形の解にするのかなどの理由・根拠についても説明すること)。

(4)　(3)の場合におけるエネルギー固有値を求めよ。

(5)　任意の量子数で表わされる運動状態について、粒子の運動量に対する期待値を求めよ。

(6)　上で求めた運動量の期待値だけでなく、位置に対する期待値も古典力学における値にそれぞれ等しい。では、量子力学から見た運動の様子は古典力学の場合と全く同じなのだろうか。理由とともに意見を述べよ。

問題Ⅱ　原点からの距離で変化する復元力が働く粒子の運動について考える。

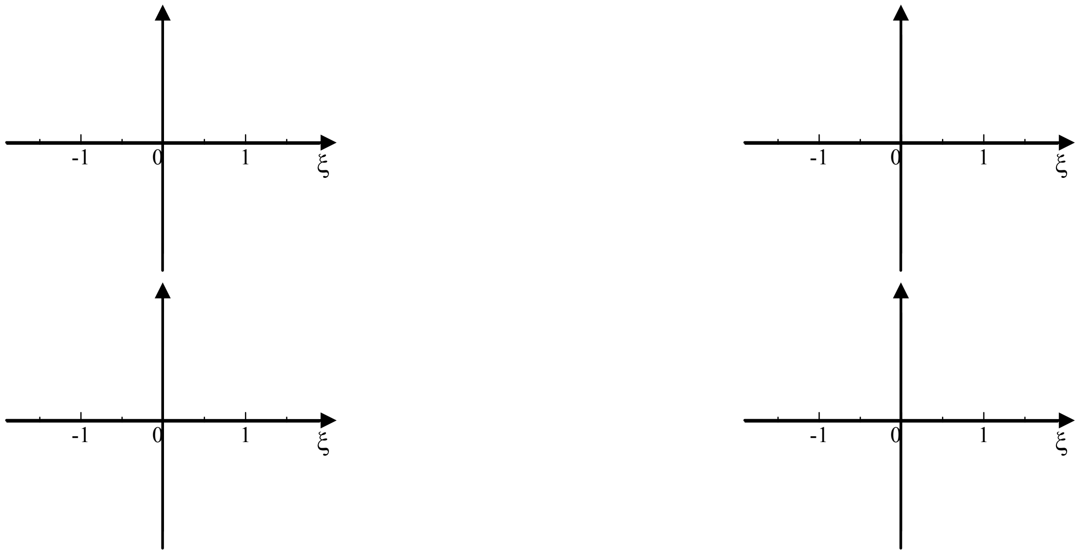
参考：m 次のエルミート多項式 $H_m(\xi)$ には次のような関係が成り立つ。$H_m''(\xi) = 2\xi H_m'(\xi) - 2mH_m(\xi)$、$H_{m+1}(\xi) = 2\xi H_m(\xi) - 2mH_{m-1}(\xi)$、$H_0(\xi) = 1$。

復元力が原点からの距離 x に比例（比例定数 k ）する一次元運動の場合を考える。また、$\omega = \sqrt{k/m}$ と定義する。

(1)　$X(x)$ を固有関数として、この一次元運動に対する時間を含まないシュレディンガー方程式の具体的な形を答えよ。

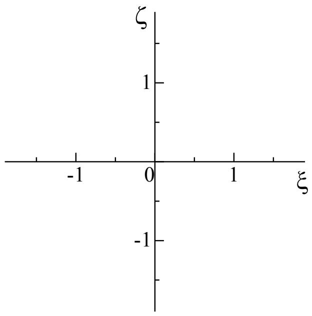
シュレディンガー方程式は位置及びエネルギーを無次元量 ξ, λ に変換することで $\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right)X(\xi) = \lambda X(\xi)$ の形となる。一方、$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right)X(\xi) = (2n+1)X(\xi)$（$n$ は零以上の整数）なる微分方程式に対して、ξ が小さいところで振動し、$|\xi| \to \infty$ で零に収束する解 $X_n(\xi) = C_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$（$C_n$ は定数）が存在する。

(2)　横軸を ξ とし、この運動の基底状態における固有関数及び粒子の存在確率の変化の様子を下記に図示せよ。第一励起状態についても同様に示せ。



x 及び y 方向の復元力がそれぞれの原点からの距離に比例（比例定数は x 方向で k、y 方向で $4k$）する 2 次元運動の場合を考える。

(3)　無次元化した y 方向の距離を ς とする。この二次元運動の第一励起状態で粒子の存在確率が最小及び最大となる位置を下記 $\xi - \varsigma$ 平面上で記せ。



x、y 及び z 方向の復元力がそれぞれの原点からの距離に比例（3 方向で比例定数は k で同じ）する 3 次元運動の場合を考える。

(4)　この三次元運動の第三励起状態までのエネルギー準位を示せ。（エネルギー原点、各準位での量子数やエネルギー値を明記すること）

問題Ⅲ．量子力学で用いられる次の専門用語を 50 文字程度で説明せよ。

定常状態

量子数

不確定性原理