量子力学 I　期末試験問題（平成 23 年 6 月 27 日）

以下において、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った数であり、ε_0 は真空の誘電率である。また、a_0 はボーア半径 $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ であり、m_e 及び e はそれぞれ電子の質量及び素電荷である。

問題 I.　有限な幅の階段型ポテンシャル（値 $V_0 > 0$、幅 a）に向ってエネルギー ε（$\varepsilon < V_0$）を持つ質量 m の粒子が単位時間当たり一定数で負の方向から次々と壁に向かってくる定常的な運動状態について考える。簡単のために階段型ポテンシャル部以外でのポテンシャルは零とする。

解答用紙にある各小問について答えよ。

問題 II. 水素原子の電子に対する固有関数は、整数 n, l, m を用いて、動径部分と角度部分の積の形 $\varphi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_l^{\,m}(\theta,\phi)$ で与えられる。このとき、エネルギー固有値は $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}$ と与えられる。ここで、具体的な値としては $\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \cong 13.6$ [eV]となる。

解答用紙にある各小問について答えよ。

なお、簡単のために $Y_l^{\,m}(\theta,\phi)$ を $Y_l^{\,m}$ などと独立変数を省略して記してよい。

参考

φ_{nlm} の動径部分：$R_{nl}(r) = C_{nl}\left(\dfrac{r}{a_0}\right)^l e^{-\frac{1}{n}\frac{r}{a_0}} \cdot L_{n+l}^{\,2l+1}\left(2\dfrac{1}{n}\dfrac{r}{a_0}\right)$

$$C_{nl} = \left(\frac{2}{n}\right)^l \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left((n+l)!\right)^3}} \quad , \qquad L_q^{\,p}(\rho) = \sum_{k=0}^{q-p}(-1)^k \frac{(q!)^2}{(q-p-k)!(p+k)!k!}\rho^k \quad , \qquad \int_0^\infty R_{nl}(r)R_{n'l}(r)r^2 dr = \delta_{nn'}$$

φ_{nlm} の角度部分：$Y_l^{\,m}(\theta,\phi) = C_{lm} \cdot P_l^{|m|}(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}$

$$C_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \quad , \qquad P_l^{|m|}(\cos\theta) = \sin^{|m|}\theta \frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}}\left(\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d(\cos\theta)^l}(\cos^2\theta - 1)^l\right)$$

$$\iint \left(Y_l^{\,m}(\theta,\phi)\right)^* Y_{l'}^{\,m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$Y_l^{\,m}(\theta,\phi)$ は演算子 $\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$ の固有関数でその固有値は $-l(l+1)$

角運動量の大きさの二乗 $\left|\vec{l}\right|^2$ に対する演算子：　$\left|\vec{l}\right|^2 = -\hbar^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$

角運動量の z 方向成分 l_z に対する演算子：　$l_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$

量子力学Ｉ　期末試験解答用紙（平成 23 年 6 月 27 日）　　　　　　　　主専攻　　学籍番号　　　　　　氏名

問題 I.　（１）シュレディンガー方程式を具体的に記せ。

（２）上で答えたシュレディンガー方程式に対して、物理的に適した波動関数の一般形を答えよ。（その形とする理由の説明がない場合は大幅減点。）

（３）波動関数が満たさなければいけない条件を述べよ。また、それより透過波や反射波の振幅比を定めるための連立一次方程式を答えよ。

（４）$\varepsilon \to V_0$ のとき、反射率の極限値を求めよ。ちなみに透過率が $\left[1+\dfrac{V_0{}^2 \sinh^2\sqrt{\dfrac{2ma^2}{\hbar^2}(V_0-\varepsilon)}}{4\varepsilon(V_0-\varepsilon)}\right]^{-1}$ で与えられることは既知として良い。

問題 II.（１）整数 n, l, m はそれぞれ何と呼ばれているか答えよ。（裏へ続く）

（２）角運動量の大きさやその z 方向成分を観測して値を得るとき、古典力学では説明できない事象について述べよ。

（３）φ_{210} で表わされる状態において電子の存在確率が最大となる位置を答えよ。（動径部分か角度部分のどちらかを先に考え、次に他方を考える。）

（４）エネルギー準位を第二励起状態まで描け（エネルギー原点を必ず示すこと）。また、それぞれの準位の横に対応する固有関数 φ_{nlm} をすべて記せ。

（５）$\varphi_{21+} = R_{21}(r)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^{1}(\theta,\phi)+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right)$ なる状態を考えるとき、この状態に対する角運動量の z 方向成分の期待値を求めよ。