量子力学Ⅰ中間試験　平成 23 年 5 月 16 日　　　　　　　　　　主専攻　学籍番号　　　　　　　　　氏名

問題Ⅰ　ある空間に完全に閉じ込められた質量 m の自由粒子の運動について考える。なお、以下において $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った数とする。

(1)　長さ a の 1 次元空間に閉じ込められた場合の運動に対する①時間を含まないシュレディンガー方程式、②解が満たすべき境界条件を答えよ。

(2)　運動エネルギーが負または零となる場合には物理的に適した解が得られない。運動エネルギーが負となる場合についてこのことを示せ。

(3)運動エネルギーが正であるとして固有関数及びエネルギー固有値を求めよ(何故そのようにするのかの説明や導出過程を全く示さない場合は大幅減点)。

(4)　運動量の二乗に対する期待値を求めよ。

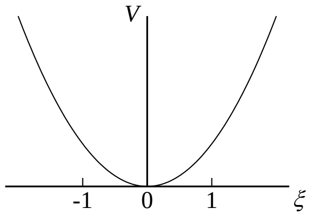
(5)　二次元長方形空間に閉じ込めた場合を考える。その第一励起状態において、空間内で粒子の存在確率が最大及び最小となる位置を図示せよ。

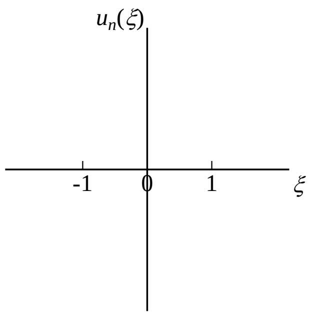
問題Ⅱ　バネ定数 k のバネと質量 m の粒子からなる一次元振動系を考える(古典的な角振動数は $\omega=\sqrt{k/m}$ で与えられる)。ここで、変位を x、系のエネルギーを ε とする。また $\xi=\sqrt{m\omega/\hbar}x$、$\lambda=2\varepsilon/(\hbar\omega)$ とする。参考：n 次のエルミート多項式 $H_n(\xi)$（但し n は零以上の整数）には次のような関係などが知られている。
$H_n''(\xi)=2\xi H_n'(\xi)-2nH_n(\xi)$、$H_{n+1}(\xi)=2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi)$、$H_0(\xi)=1$。

(1)　①古典的ハミルトニアンを記し、②時間を含まないシュレディンガー方程式が $\left(-\dfrac{d^2}{d\xi^2}+\xi^2\right)u(\xi)=\lambda u(\xi)$ の微分方程式と変形できることを示せ。

(2)　(1)②の微分方程式の解は、ε にある制約をつけることでエルミート多項式 $H_n(\xi)$ とガウス関数 $e^{-\xi^2/2}$ を用いて $u_n(\xi)=C_nH_n(\xi)e^{-\xi^2/2}$（$C_n$ は定数）と表わすことができるようになる。$u_n(\xi)$ を微分方程式に代入して計算することから、ε がどのように表わされるか答えよ。

(3)　下記の左側のグラフに $u_0(\xi)$ 及び $u_1(\xi)$ の概形(極値、変曲点、漸近形などに注意)及びエネルギー準位を図示せよ。





問題Ⅲ．次の用語が表わす内容を一行程度で説明せよ。

ド・ブロイの関係

量子数

不確定性原理