量子力学Ｉ　期末試験問題（平成 22 年 6 月 25 日）

以下において、$\hbar$はプランク定数を2πで割った数であり、ε_0は真空の誘電率である。また、a_0はボーア半径 $a_0=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$であり、$m_e$及び$e$はそれぞれ電子の質量及び素電荷である。

問題Ｉ.　有限な幅の階段型ポテンシャル（値$V_0>0$、幅a）に向ってエネルギーε（$\varepsilon>V_0$）を持つ質量mの粒子が単位時間当たり一定数で負の方向から次々と壁に向かってくる定常的な運動状態について考える。簡単のために階段型ポテンシャル部以外でのポテンシャルは零とする。

解答用紙にある各小問について答えよ。

問題 II．水素原子の電子に対する固有関数は、整数n,l,mを用いて、動径部分と角度部分の積の形 $\varphi_{nlm}=R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$で与えられる。このとき、エネルギー固有値は$E_n=-\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}$と与えられる。ここで、具体的な値としては$\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\cong 13.6$ [eV]となる。

解答用紙にある各小問について答えよ。

参考

φ_{nlm}の動径部分：$R_{nl}(r)=C_{nl}\left(\dfrac{r}{a_0}\right)^l e^{-\frac{1}{n}\frac{r}{a_0}}\cdot L_{n+l}{}^{2l+1}\left(2\dfrac{1}{n}\dfrac{r}{a_0}\right)$

$$C_{nl}=\left(\frac{2}{n}\right)^l\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}}\quad,\quad L_q{}^p(\rho)=\sum_{k=0}^{q-p}(-1)^k\frac{(q!)^2}{(q-p-k)!(p+k)!k!}\rho^k\quad,\quad\int_0^\infty R_{nl}(r)R_{n'l}(r)r^2dr=\delta_{nn'}$$

φ_{nlm}の角度部分：$Y_l^m(\theta,\phi)=C_{lm}\cdot P_l^{|m|}(\cos\theta)\cdot e^{im\phi}$

$$C_{lm}=(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\quad,\quad P_l^{|m|}(\cos\theta)=\sin^{|m|}\theta\frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}}\left(\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d(\cos\theta)^l}(\cos^2\theta-1)^l\right)$$

$$\iint Y_l^m(\theta,\phi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)d\theta d\phi=\delta_{ll'}\delta m_{m'}$$

$Y_l^m(\theta,\phi)$は演算子$\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$の固有関数でその固有値は$-l(l+1)$

角運動量の大きさの二乗$\left|\vec{l}\right|^2$に対する演算子：　$\left|\vec{l}\right|^2=-\hbar^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$

角運動量のz方向成分l_zを表す演算子：　$l_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$

量子力学Ｉ　期末試験解答用紙（平成 21 年 6 月 25 日）　　　　　　　主専攻　　学籍番号　　　　　　氏名

問題 I.　　（１）シュレディンガー方程式を具体的に記せ。

（２）上で答えたシュレディンガー方程式に対して、物理的に適した波動関数の一般形を答えよ。(その形とする理由の説明がない場合は大幅減点)。

（３）透過率を求めよ。

（４） この問題の条件下で観測される、古典力学では説明できない量子力学的効果について述べよ。

問題 II. （1）整数n, l, mはそれぞれ何と呼ばれているか答えよ。

（2）n, l, mの間にはどのような制約や関係があるか答えよ（忘れた人はルジャンドル倍関数やラゲール倍関数の式などをよく見てみよう）。

（3）$|l|^2$を測定すると$6\hbar$の値が観測される運動状態において、l_zを観測するとどのような値が得られるか、理由とともに答えよ。

（4）基底状態に対する波動関数の動径部分に対する関数形を具体的に示し、その動径変化の概略をグラフに描け。

（5）基底状態において電子の存在確率が最大となる位置を答えよ。

（6）第一励起状態でかつ$l_z = 0$となる運動状態にある場合、電子の存在確率が零となる位置（節）を答えよ。

（7）水素原子の線スペクトルであるバルマー系列では、波長 656、486、434 nm などの可視光の吸放出が観測される。波長 486 nm の光の吸放出はどの準位間によるものと考えられるか、理由とともに答えよ。参考：$h\nu = hc/(486\times10^{-9}) \approx 2.55$[eV]