H16 年度微分積分演習　No.24　('04/6/24)　学籍番号　　　　　　　　　　氏名

$f(x,y)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)$ とする。

1)　全微分 $df(x,y)$ を求めよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)\cdot\frac{\pi}{4}(2x+y)=\frac{\pi}{4}(2x+y)\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)\cdot\frac{\pi}{4}(x+2y)=\frac{\pi}{4}(x+2y)\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)$$

よって $df(x,y)=\left\{\frac{\pi}{4}(2x+y)\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)\right\}dx+\left\{\frac{\pi}{4}(x+2y)\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(x^2+xy+y^2\right)\right)\right\}dy$

2)　点 $(1,2)$ における勾配ベクトルを求めよ。

点 $(1,2)$ での勾配ベクトルは、$\left(f_x(1,2),\ f_y(1,2)\right)=\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right),\frac{\pi}{4}\cdot 5\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2},-\frac{5\sqrt{2}\pi}{8}\right)$

3)　点 $(1,-1)$ における $(-1,-1)$ 方向の微分係数を求めよ。

点 (a,b) における (α,β) 方向の微分係数 $D_{(\alpha,\beta)}f(a,b)$ は、(α,β) 方向の単位ベクトル $(u_x,\ u_y)$及び (a,b) における勾配ベクトル $(\nabla f)(a,b)=\left(f_x(a,b),\ f_y(a,b)\right)$ を用いて

$D_{(u_x,u_y)}f(x,y)=f_x(x,y)\cdot u_x+f_y(x,y)\cdot u_y=\left\langle\left(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\right),\left(u_x,u_y\right)\right\rangle$ となる。

$(-1,-1)$ 方向の単位ベクトルは $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となるので、点 $(1,-1)$ における $(-1,-1)$ 方向の微分係数は

$$D_{(-1,-1)}f(1,-1)=\left\langle\left(f_x(1,-1),\ f_y(1,-1)\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle=\left\langle\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\frac{\pi}{4}\cdot(-1)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle=0$$

4)　$z=f(x,y)$ として表される曲面に対して、点 $\left(0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ における接平面を求めよ。

点 $\left(0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ における曲面の法線ベクトルは、$\left(f_x(0,1),\ f_y(0,1),-1\right)=\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$ と書ける。

よって接平面の方程式は、$\left\langle\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8},\frac{\sqrt{2}\pi}{4},-1\right),\left(x-0,y-1,z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle=0$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{2}\pi}{8}x+\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(y-1)-\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$z(x, y) = \sin\frac{\pi}{4}\left(x^2 + xy + y^2\right)$$