H15 年度微分積分演習　No.21　('04/6/15)　学籍番号　　　　　　　　氏名

$f''(x)=f(x)$ を満たす $f(x)$ を、整級数を用いて求めよう。

1)　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$ に対して、$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$ を計算せよ。

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right)$$

$$= 0 + 0 + 2\cdot 1 c_2 x^{2-2} + 3\cdot 2 c_3 x^{3-2} + 4\cdot 3 c_4 x^{4-2} \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}x^{n+1-2} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n+2-2} + \ldots$$

$$= 2\cdot 1 c_2 + 3\cdot 2 c_3 x^3 + 4\cdot 3 c_4 x^2 \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}x^{n+1-2} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n+2-2} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

2)　$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$ となる収束半径内では、$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を n 階項別微分したものは $f^{(n)}(x)$ に収束する（教科書 p80 定理 16）。1)の結果を踏まえて、 $f''(x)=f(x)$ となる場合に係数 C_n と C_{n+2} との間に成り立つ関係式を答えよ。

$f''(x)=f(x)$ であるからして、$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

ここでテイラー級数の一意性より、上記の二つの級数における x^n の係数は等しくならなけらばいけない。

$\therefore (n+2)(n+1)c_{n+2} = c_n$

3)　2)で求めた係数 C_n と C_{n+2} との間の関係式から、整級数の各係数を決定せよ（２階の微分方程式なので、未定係数が２つ残ることに注意）。さらに、その収束半径を考えることから $f(x)$ を求めよ。

$(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_n$ ゆえ、$c_{n+2} = \frac{c_n}{(n+2)(n+1)} = \frac{c_{n-2}}{(n+2)(n+1)n(n-1)}$

従って、

$n=2m$（m：0 以上の整数）のとき　$c_{2m} = \frac{c_{2m-2}}{2m(2m-1)} = \frac{c_{2m-4}}{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)} = \cdots = \frac{c_0}{(2m)!}$

$n=2m+1$　　　　　　のとき　$c_{2m+1} = \frac{c_{2m-1}}{(2m+1)2m} = \frac{c_{2m-3}}{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)} = \cdots = \frac{c_1}{(2m+1)!}$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_{2m}x^{2m} + c_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots$$

$$= c_0 + c_1 x + \frac{c_0}{2!}x^2 + \frac{c_1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{c_0}{(2m)!}x^{2m} + \frac{c_1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

$$= c_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots\right)$$

$$= c_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}\right) + c_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

ここで、$n\to\infty$ で $\left|\frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}}\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0$、$\left|\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}\right| = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \to 0$

従って$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$および$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$の収束半径は$+\infty$であり、整級数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$で表される関数は任意の$x$において$f''(x)= f(x)$の関係を満たす。

このとき、$-\infty < x < \infty$で$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x$、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sinh x$と収束するので、求める$f(x)$は

$f(x)=c_0\cosh x+c_1\sinh x$　（c_0, c_1は任意定数）である。