H16 年度微分積分演習　No.20　('04/6/11)　学籍番号　　　　　　　　　　氏名

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ は収束するかどうか、また絶対収束するかどうか答えよ。

交項級数であり、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$ と表せば $a_n=\frac{1}{n}$ であり、a_n は n に対して単調減少でかつ $n\to\infty$ で $a_n\to 0$ となる。従って定理（教科書 p75、定理 12）より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ は収束する。

一方、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ の各項の絶対値を取って作られる級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は調和級数であり、収束しない。

従って、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ は絶対収束しない。

2)　整級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n$ の収束半径 ρ を求めよ。また、収束半径となる $|x|=\rho$ で収束するかどうか答えよ。

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ とすると $c_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ となるので、その収束半径を ρ とすると定理 14(p.78)より、

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}}\right|=\frac{1}{3}$$

となるので、整級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n$ の収束半径は 3 である。

ここで、

$x=3$ のとき、$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k 3^k=-1+1-1+1\cdots+(-1)^k=\begin{cases}-1 & k:odd\\ 0 & k:even\end{cases}$ となり、部分和は収束しない。

$x=-3$ のとき、$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k (-3)^k=1+1+1+1\cdots+1=k$ となり、部分和は収束しない

従って、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n$ は $x=\pm 3$ において収束しない。