H16 年度微分積分演習　No.16　('04/6/1)　　学籍番号　　　　　　　　　氏名

1)　$\sin t$ のマクローリン展開を t の 5 次まで求めよ（5 次以上の項はランダウのオミクロン表示で良い）。

$$\sin t = \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}t^1 + \frac{-\sin(0)}{2!}t^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}t^3 + \frac{\sin(0)}{4!}t^4 + \frac{\cos(\theta t)}{5!}t^5 \qquad (0<\theta<1)$$

$$= t - \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{O}(t^5)$$

2)　xe^x のマクローリン展開を x の 5 次まで求めよ（5 次以上の項はランダウのオミクロン表示で良い）。

$$xe^x = x\left(e^0 + \frac{e^0}{1!}x^1 + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^{\theta' x}}{3!}x^3\right) \qquad (0<\theta'<1)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)$$

3)　1)及び 2)の結果を用いて、$\sin\left(xe^x\right)$ のマクローリン展開を x の 4 次まで正しく求めよ（5 次以上の項はランダウのオミクロン表示で良い）。

1) において、$t = xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)$ とすると、

$$\sin\left(xe^x\right) = \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)\right) - \frac{1}{6}\left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)\right)^3 + \mathrm{O}\left(\left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)\right)^5\right)$$

$$= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)\right) - \frac{1}{6}\left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)\right)^3 + \mathrm{O}\left(x^5\right)$$

$$= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{O}(x^5)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3x^4 + \mathrm{O}(x^5)\right) + \mathrm{O}\left(x^5\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \mathrm{O}\left(x^5\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \mathrm{O}\left(x^5\right)$$

4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(xe^x\right) - x}{\cos x - 1}$ を求めよ。

$$\frac{\sin\left(xe^x\right) - x}{\cos x - 1} = \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \mathrm{O}\left(x^5\right) - x}{1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}\left(x^4\right) - 1} = \frac{x^2 + \mathrm{O}\left(x^3\right)}{-\frac{x^2}{2} + \mathrm{O}\left(x^4\right)} \to -2 \qquad (x \to 0)$$