H16 年度微分積分演習　No.14　('04/5/27)　学籍番号　　　　　　　　氏名

1)　$f(x)$ は$[a,b]$でC^{n-1} - 級であり、$f^{(n)}(x)$が(a,b)で存在するとき、$f(b)$は$f(a)$、$f'(a)$、… などを用いてどの様に表すことが出来るか示せ。

テイラーの定理より

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_{n,a}(b)$$

ここで、$R_{n,a}(b)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$　但し$c\in(a,b)$。

ちなみに$c=\theta(b-a)$　$(0<\theta<1)$とすれば　$R_{n,a}(b)=\dfrac{f^{(n)}(\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n$

2)　$f(x)=(1+x)^2$ について、$x=0$ を中心として $f(x)$ を剰余項が 1、2 及び 3 次となるまでテイラー展開せよ。

$f'(x)=2(1+x)$、$f''(x)=2$、$f'''(x)=0$ より

$n=1$ の時、$f(x)=f(0)+R_1=1+R_1$　　ここで、$R_1=\dfrac{f'(\theta x)}{1!}(x-0)^1=2(1+\theta x)x$　　$(0<\theta<1)$

$n=2$ の時、$f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}(x-0)^1+R_2=1+2x+R_2$　　ここで、$R_2=\dfrac{f''(\theta x)}{2!}(x-0)^2=\dfrac{2}{2!}x^2=x^2$ $(0<\theta<1)$

$n=3$ の時、$f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}(x-0)^1+\dfrac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+R_3=1+2x+x^2+R_3$

ここで、$R_3=\dfrac{f'''(\theta x)}{3!}(x-0)^3=\dfrac{0}{3!}x^3=0$　　$(0<\theta<1)$

3)　$(1+x)^\alpha$ を剰余項が n 次となるまでマクローリン展開せよ。但しαはゼロ及び自然数を除く任意の実数とする。

$$\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(1+x)^\alpha=\frac{d}{dx}\left(\alpha(1+x)^{\alpha-1}\right)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

…

よって一般に　$\dfrac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha=\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\alpha(1+x)^{\alpha-1}\right)=\cdots\cdots=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$

（もしαが自然数ならば、$n>\alpha$ なる n に対する高階の導関数はすべてゼロとなる。）

$$\therefore (1+x)^\alpha=(1+0)^\alpha+\frac{\alpha(1+0)^{\alpha-1}}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)(1+0)^{\alpha-2}}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)(1+0)^{\alpha-n+1}}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$$

$$=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$$

ここで　$R_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}}{n!}x^n$　　$(0<\theta<1)$