H16 年度微分積分演習　No.13　('04/5/21)　学籍番号　　　　　　　　　氏名

1)　$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ を計算せよ（まず $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ および $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ を計算してみよ)。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{d}{dx}\left((x-1)^{-1}\right)=-1\cdot(x-1)^{-2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(-(x-1)^{-2}\right)=-1\cdot(-2)(x-1)^{-3}$$

$$\therefore\ \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^{-1}\right)=-1\cdot(-2)(-3)\cdots(x-1)^{-n-1}=(-1)^n n!(x-1)^{-n-1}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

2)　$\dfrac{d^n}{dx^n}(\cos ax)=a^n\cos(ax+\dfrac{\pi}{2}n)$ を示せ（$\sin ax=-\cos\left(ax+\dfrac{\pi}{2}\right)$ の関係を利用すると簡単)。

$$\frac{d}{dx}(\cos ax)=a\cdot(-\sin ax)=a\left[-\left(-\cos(ax+\frac{\pi}{2})\right)\right]=a\cos(ax+\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cos ax)=\frac{d}{dx}\left(a\cos(ax+\frac{\pi}{2})\right)=a\left(-\sin(ax+\frac{\pi}{2})\cdot a\right)=a^2\cos(ax+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=a^3\cos(ax+\pi)$$

$$\therefore\ \frac{d^n}{dx^n}(\cos ax)=a^n\cos(ax+\frac{\pi}{2}n)$$

3)　$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^3e^{2x}\right)$を計算せよ（$n=2$ まで計算し、$n\geq 3$ では Leibniz rule（教科書 p58 定理 1）を用いる)。

$$\frac{d}{dx}\left(x^3e^{2x}\right)=3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}=\left(3x^2+2x^3\right)e^{2x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3e^{2x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\left(3x^2+2x^3\right)e^{2x}\right)=\left(6x+6x^2\right)e^{2x}+2\left(3x^2+2x^3\right)e^{2x}=2\left(3x+6x^2+2x^3\right)e^{2x}$$

ちなみに $\dfrac{d^3}{dx^3}\left(x^3e^{2x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(2\left(3x+6x^2+2x^3\right)e^{2x}\right)=2\left(\left(3+12x+6x^2\right)e^{2x}+2\left(3x+6x^2+2x^3\right)e^{2x}\right)=2\left(3+24x+18x^2+4x^3\right)e^{2x}$

$n\geq 3$ で Leibniz rule を用いると

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^3e^{2x}\right)=(x^3)^{(n)}(e^{2x})^{(0)}+{}_nC_1(x^3)^{(n-1)}(e^{2x})^{(1)}+{}_nC_2(x^3)^{(n-2)}(e^{2x})^{(2)}+\cdots+{}_nC_{n-1}(x^3)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}+(x^3)^{(0)}(e^{2x})^{(n)}$$

x^3 の 4 階以上の導関数はゼロになるので、上式において n - 4 項目まではゼロ

$$\therefore\ \frac{d^n}{dx^n}\left(x^3e^{2x}\right)=\overbrace{0+0+\cdots+0}+{}_nC_{n-3}(x^3)^{(3)}(e^{2x})^{(n-3)}+{}_nC_{n-2}(x^3)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}+{}_nC_{n-1}(x^3)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}+(x^3)^{(0)}(e^{2x})^{(n)}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\left(3\cdot 2\cdot 1\right)\cdot 2^{n-3}e^{2x}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\left(3\cdot 2x\right)\cdot 2^{n-2}e^{2x}+\frac{n}{1}\cdot\left(3x^2\right)\cdot 2^{n-1}e^{2x}+x^3\cdot 2^n e^{2x}$$

$$=2^{n-3}e^{2x}(n(n-1)(n-2)+6n(n-1)x+12nx^2+8x^3)$$