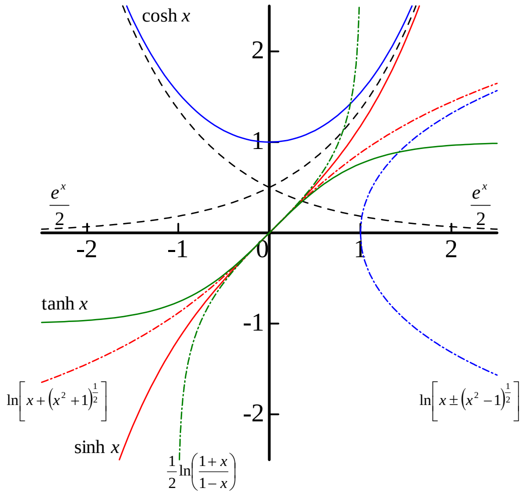
H15 年度微分積分演習　No.12　('04/5/20)　学籍番号　　　　　　　氏名

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について調べよう。

1)　$y = \dfrac{e^x}{2}$ および $y = \dfrac{e^{-x}}{2}$ の概形をグラフに示し、それらをもとに $\cosh x$ の概形をグラフに描け。



2)　$y = \cosh x$ の逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ が定義できるように定義域を定めよ。さらにそのとき、$y = \cosh^{-1} x$ に対する定義域と値域についても答えよ。

$y = \cosh x$ において定義域を $0 \le x < +\infty$ に限定すれば $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \ge 0$（等号は $x = 0$ のときのみ）となり、（狭義）単調増加で逆関数が定義可能となる。このときの値域は $1 \le y < +\infty$ である。

従って、$y = \cosh^{-1} x$ の定義域及び値域はそれぞれ $1 \le x < +\infty$、$0 \le y < +\infty$ となる。

3)　$y = \cosh^{-1} x$ には別の表し方が存在する。その式を求めよ（ヒント：$x = \cosh y$ において $t = e^y$ と置き、t を x で表す)。

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow x = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \quad \text{（但し } 0 \le y < +\infty \text{ ゆえ、} 1 \le t < +\infty\text{）}$$

$$\therefore t^2 - 2xt + 1 = 0 \Rightarrow t = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{（} 1 \le t < +\infty \text{ なので、} t = x - \sqrt{x^2 - 1} \text{ は不適）}$$

$$\therefore y = \log(t) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

なお、時間のある人は $y = \tanh^{-1} x$ についても同様なことを考えよ。

$y = \tanh^{-1} x$ の定義域は $-1 < x < +1$、値域は $-\infty < y < +\infty$

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow x = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} \Rightarrow (t^2 + 1)x = t^2 - 1 \Rightarrow t^2 = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \log t = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$