H16 年度微分積分演習　No.9　('04/5/13)　　学籍番号　　　　　　　　　氏名

I.　1)　$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$ を求めよ（ヒント：$x^4 = x^4 - 1 + 1$）。

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx = \int\left((x^2-1)+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x + C$$

2)　$\int_0^3 x^2\log(1+x^2)dx$ を計算せよ（ヒント：部分積分してみよ）。

$$\int_0^3 x^2\log(1+x^2)dx = \int_0^3\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log(1+x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\log(1+x^2)\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{x^3}{3}\frac{2x}{1+x^2}dx = 9\log 10 - \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

ここで、1)より、$\int_0^3 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x\right]_0^3 = 6 + \tan^{-1}3$

$$\therefore \int_0^3 x^2\log(1+x^2)dx = 9\log 10 - \frac{2}{3}\left(6+\tan^{-1}3\right) = 9\log 10 - 4 - \frac{2}{3}\tan^{-1}3$$

II.　1)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}dx$ を示せ。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot(\sin x)'dx = \left[\cos^{n-1}x\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)dx = (n-1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}xdx - I_n\right\}$$

$$\therefore I_n = \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}xdx = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

2)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} & (n : odd) \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & (n : even)\end{cases}$ となることを示せ。

n が奇数のとき、$I_n = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2} = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)}I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1$

ここで、$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^1 xdx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ ゆえ、$I_n = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}$

n が偶数のとき、$I_n = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2} = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)}I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0$

ここで、$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 xdx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ ゆえ、$I_n = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$