H15 年度微分積分演習　No.4　('04/4/22)　学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

$\sqrt{66}$ のおおよその値を求めよう。

（１） $f(x)=\sqrt{x}$、$0<a<b$ とするとき、 $f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2\sqrt{c}}(b-a)$ と表せることを示せ。またこのとき、c はどのような区間内にあるか述べよ。

$f(x)=\sqrt{x}$ は $x>0$ で連続かつ微分可能であるので、平均値の定理より $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ を満たす $c\in(a,b)$ が存在する。これを変形して

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$$
$$\therefore\ f(b)=f(a)+\frac{1}{2\sqrt{c}}(b-a)$$

（２） $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $x>0$ で狭義単調減少関数であることを示せ。さらに $64<c<81$ なる場合に $\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{\sqrt{c}}<\dfrac{1}{8}$ が成立することを示せ。

$x>0$ で常に $g'(x)=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}<0$ ゆえ、$g(x)$ は $x>0$ で狭義単調減少関数である。従って

$g(64)>g(c)>g(81)$、つまり $\dfrac{1}{8}>\dfrac{1}{\sqrt{c}}>\dfrac{1}{9}$。

（３）（１）で $a=64$、$b=66$ とし、$f(66)=8+\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ と表されることを示せ（但し $c\in(64,66)$）。

$a=64$、$b=66$ とすると（１）より、

$f(66)=f(64)+\dfrac{1}{2\sqrt{c}}(66-64)=8+\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ を満たす c が $(64,66)$ に存在する。

（４）（２）の結果を用いて、さらに $8+\dfrac{1}{9}<\sqrt{66}<8+\dfrac{1}{8}$ を示せ。

$c\in(64,66)$ ゆえ $64<c<81$ とすると、（２）より $\dfrac{1}{8}>\dfrac{1}{\sqrt{c}}>\dfrac{1}{9}$ ゆえ $8+\dfrac{1}{9}<8+\dfrac{1}{\sqrt{c}}<8+\dfrac{1}{8}$。

$\therefore 8+\dfrac{1}{9}<\sqrt{66}<8+\dfrac{1}{8}$　　ちなみに $\sqrt{66}=8.1240384\ldots$。