H16 年度微分積分演習　No.1　('04/4/15)　　学籍番号　　　　　　　　　氏名

$a_1 = \sqrt{2}$ 、 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ なる数列の収束性を調べよう。

i.　単調性について調べよ。
ii.　有界性について調べよ。
iii.　上記より収束するかどうか判断し、収束する場合には、その極限値を求めよ。

i.&ii.　明らかに $a_n > 0$ である。また、

$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$　　$a_3 = \sqrt{2a_2} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$　　$\cdots\ \cdots$

$\therefore a_n = \sqrt{2a_{n-1}} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$　　$\boxed{\text{上に有界}}$

$(a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = \left(\sqrt{2a_n}\right)^2 - \left(\sqrt{2a_{n-1}}\right)^2 = 2(a_n - a_{n-1}) > 0$　　$\left[\because a_2 - a_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} > 0\right]$

$\therefore a_{n+1} > a_n (> 0)$　　$\boxed{\text{単調増加}}$

iv.　よって、$\{a_n\}$は上に有界で単調増加な数列なので公理により収束する。

極限値をαと仮定して、$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ の両辺について極限を考えると

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n}$　　$\therefore \alpha = \sqrt{2\alpha}$　　$\therefore \alpha^2 - 2\alpha = 0$

$\{a_n\}$は単調増加ゆえ $\alpha > \sqrt{2}\left(= a_1\right)$ であり、$\alpha = 0$ は不適。よって $\alpha = 2$。